

Corso Zero Matematica CdL Scienze Biologiche

Eq^{re} e Disegne di 1° grado

$$ax + b = 0$$

Def Dato un polinomio $P(x)$, un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice radice di $P(x)$ se

$$P(x_0) = 0$$

ossia

se sostituendo alla x il numero x_0 nel polinomio $P(x)$ otteniamo zero!

$$ax + b = 0$$

Caso $(a = 0) \rightarrow b = 0$

ossia nessuna soluzione se $(b \neq 0)$

Caso $(a \neq 0)$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Sol

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

Unica soluzione

Diseg. 2° grado

$$ax + b \geq 0$$

Caso $a \neq 0$

$$ax \geq -b$$

sottocaso 1

$$a > 0 \rightarrow$$

$$x \geq -\frac{b}{a}$$

sottocaso 2

$$a < 0 \rightarrow$$

$$x \leq -\frac{b}{a}$$

Attenzione: moltiplicare o dividere per un numero negativo ci cambia il verso della disuguaglianza

Concluso

$$a > 0 \Rightarrow$$

$$\text{sol } \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow$$

$$\text{sol } \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$$

Esempio

$$10x + 8 < 0$$

$$10x < -8$$

$$x < -\frac{8}{10}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}$$

Sol

$$]-\infty, -\frac{4}{5}[$$

Es

$$-2x + 3 \leq 0$$

$$-2x \leq -3$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{-2}$$

Sol

$$x \geq \frac{3}{2}$$

ossia Sol $\left[\frac{3}{2}, +\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{3}{2}\right\}$

note $\left]\frac{3}{2}, +\infty[= \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{3}{2}\right\}$

Equazione di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Richiamo

$$\textcircled{1} \quad y^2 - z^2 = (y+z)(y-z)$$

$\textcircled{2}$ legge di annullamento prodotto

$$y \cdot z = 0 \quad (\Rightarrow) \quad y=0 \quad \text{opp.} \quad z=0$$

$$\textcircled{3} \quad (y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2$$

caso $\textcircled{a=0} \rightarrow bx+c=0$ che sappiamo già risolvere

caso $\textcircled{a \neq 0}$

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

legge annullamento prodotto

$$(\Rightarrow) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Si chiama $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Caso 1 $\Delta < 0$

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a^2}}_{> 0} = 0$$

$$\Rightarrow \text{sol} = \emptyset \quad (\text{nessuna soluzione})$$

nel caso $\Delta < 0$ otteniamo che il polinomio di 2° grado è sempre positivo

Caso 2 $\Delta = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Sol $x = -\frac{b}{2a}$

Caso $\Delta > 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

Da ①

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

legge di annullamento prodotto

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{opp.} \quad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{opp.}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sol $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ 2 soluzioni distinte

Disuguaglianza 2° grado

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Caso $a > 0$

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \geq 0$$

Regola dei segni $(\Rightarrow) x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \geq 0$

$$(\Rightarrow) \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$$

Caso 1 $(\Delta < 0) \Rightarrow \text{Sol} = \mathbb{R}$

perché

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a^2}}_{> 0} \geq 0$$

Somma di quantità positive è sempre positiva!

Caso 2 $(\Delta = 0) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \text{Sol} = \mathbb{R}$$

Attenzione: se fosse stato $ax^2 + bx + c > 0$

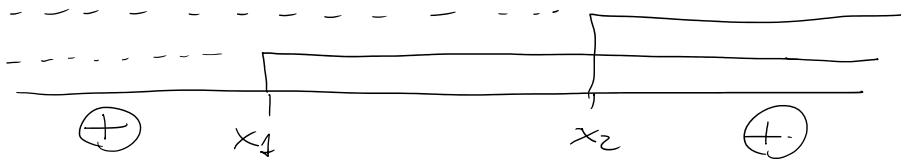
$$\text{con } \Delta = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$\text{Sol} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Caso 3 $(\Delta > 0) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \geq 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \geq 0$$

Se $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$



Concludo Sol $]-\infty, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}] \cup [\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty[$

Studiamo in maniera analoga

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

con $a > 0$

caso $\Delta < 0 \Rightarrow \text{Sol} = \emptyset$

caso $\Delta = 0 \Rightarrow \text{Sol } x = \frac{-b}{2a}$

$\left[\text{Se invece fosse stato } ax^2 + bx + c < 0 \text{ con } \Delta = 0 \right. \\ \left. \Rightarrow \text{Sol} = \emptyset \right]$

caso $\Delta > 0 \text{ Sol } \left[\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right]$

Se accade $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a < 0$

basta moltiplicare ambo i membri per (-1) , per ottenere

$$(-a)x^2 - bx - c \leq 0$$

$-a > 0$

riottengo un caso visto sopra

Esempio

$$2x^2 + 4x + 6 \leq 0$$

Divido per 2 : $x^2 + 2x + 3 \leq 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 < 0$$

$$\Rightarrow \text{sol} = \emptyset$$

Es

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

$$\underline{\text{Sol}} \quad]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$$

Egari e Disegrazioni di grado superiore

Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n \geq 3$

Teorema (Gauss)

Ogni polinomio reale si può sempre decomporre come prodotto di polinomi o di 1° grado oppure di 2° grado irriducibile

Per poter decomporre un polinomio abbiamo bisogno del seguente fatto

Fatto 1 x_0 è radice di $P(x) \iff P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$
 dove $\boxed{\text{grad } Q = \text{grad } P - 1}$

Ossia si tratta nell'individuare una radice

si utilizza (se di aiuto?) il seguente

Teorema (resto)

Una radice razionale ($x_0 \in \mathbb{Q}$) di un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

va cercato tra i divisori del termine noto a_0

presi con il segno $+$ e $-$

e in più si aggiungono tali divisori di a_0 diviso
i divisori del coeff. di grado max a_n

Una volta che abbiamo individuato una radice $x_0 \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$$

Il polinomio $Q(x)$ viene trattato in 2 modi

modo 1 Usare Ruffini

modo 2 Divisione $\frac{P(x)}{x - x_0} = Q(x)$

Esempio Decomporre il polinomio

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

Cerco una radice

Termine noto 6 - Divisori $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$(x=1) \rightarrow 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 6 \neq 0 \quad (\text{No})$$

$$(x=-1) \rightarrow (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 6 =$$

$$-1 + 6 - 11 + 6 = 12 - 12 = 0$$

OK

Fatto 1 $\Rightarrow P(x) = (x - (-1)) \cdot Q(x)$
 $= (x+1) \cdot Q(x)$

Trovare $Q(x)$

modo 1 Ruffini:

1	6	11	6
-1	0	-1	-6
1	5	6	#

radice
somma
coefficienti di $Q(x)$
nell'ordine dei gradi.
questo resto deve
per forza essere zero!

$$Q(x) = 1 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 6$$

Ossia $P(x) = (x+1)(x^2 + 5x + 6)$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 \quad \text{radici di } Q(x)$$

Sao

$$x_1 = \frac{-5-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5+1}{2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

Fatto 1 $\Rightarrow Q(x) = (x - (-2)) \cdot (x - (-3))$
 $= (x+2)(x+3)$

Conclusione $P(x) = (x+1) \underbrace{(x+2)(x+3)}_{Q(x)}$

mod 2 Dividere per trovare $Q(x) = \frac{P(x)}{x+1}$

Sottraggio

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 5x^2 + 11x + 6 \\ \underline{5x^2 + 5x} \\ 6x + 6 \\ \underline{6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$\underbrace{x^2 + 5x + 6}_{Q(x)}$

Egre e disegre di grado superiore

Se $P(x)$ un polinomio di grado $n \geq 3$

e vogliamo studiare $P(x) = 0$

In tal caso si scompone $P(x)$ come prodotto di 1° grado o 2° grado irriducibile ($\Delta < 0$ quindi non si annulla mai)

$$P(x) = 0$$

$$(a_1x + b_1) \cdot \dots \cdot (q_1x + b_1) \cdot \dots \cdot (g_1x^2 + d_1x + e_1) = 0$$

uso legge di annullamento prodotto

Sol

$$a_1x + b_1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{b_1}{a_1}$$

$$a_2x + b_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{b_2}{a_2}$$

Nella disequazione $P(x) \geq 0$

Utilizzo il metodo ~~sgn~~ con la differenza che invece di usare legge di annullamento prodotto utilizzo regola dei segni

Es $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0$

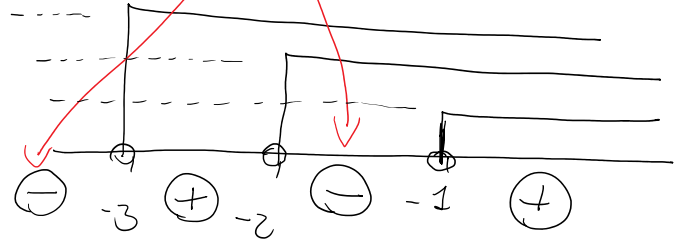
Decompongo

$$(x+1)(x+2)(x+3) < 0$$

Se $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Se $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Se $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$



Concludo $Sol =]-\infty, -3[\cup]-2, -1[$

Es

$$x^3 + 1 \geq 0$$

Decomp Cerco radici di $x^3 + 1$ tra ± 1

$x=1 \rightarrow 1^3 + 1 = 2 \neq 0$ (X)

$x=-1 \rightarrow (-1)^3 + 1 = 0$ (OK)

$$\Rightarrow x^3 + 1 = (x - (-1)) \cdot Q(x)$$

Ruffini

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	#

1 -1 1

$$\hookrightarrow Q(x) = x^2 - x + 1$$

$$x^3 + 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$

QSS'2

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Controllo Δ di $Q(x)$: $\Delta = 1 - 4 < 0$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - x + 1 > 0 \text{ sempre}}$$

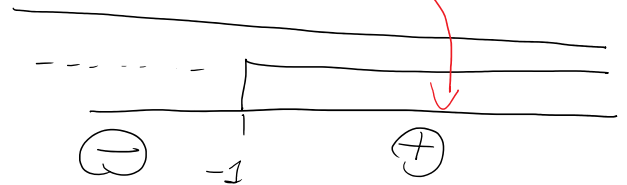
$$x^3 + 1 \geq 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0$$

regole segni

$$x+1 \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \geq -1$$

$$x^2 - x + 1 \geq 0 \quad (\Rightarrow) \text{ sempre}$$



Sol

$$[-1, +\infty[$$

Esempio

$$2x^3 - 11x^2 + 12x - 6 > 0$$

Radici

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{x=-2} &\rightarrow 2 \cdot (-2)^3 - 11 \cdot (-2)^2 + 17 \cdot (-2) - 6 = \\ &= -16 - 44 - 34 - 6 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{x=2} &\rightarrow 2 \cdot (2)^3 - 11 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2 - 6 = \\ &= 16 - 44 + 34 - 6 = 50 - 50 = 0 \quad \textcircled{OK} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = (x-2) Q(x)$$

Trono $Q(x)$ tramite divisione

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ -7x^2 + 17x - 6 \\ \underline{-7x^2 + 14x} \\ 3x - 6 \\ \underline{3x - 6} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{X-2} \\ 2x^2 - 7x + 3 \\ \hline Q(x) \end{array}$$

$$\text{OSS12} \quad (x+2)(2x^2 - 7x + 3) \geq 0$$

Controlla $\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 5^2$

$$2x^2 - 7x + 3 = \left(x - \left(\frac{7-5}{4}\right)\right) \left(x - \left(\frac{7+5}{4}\right)\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 3)$$

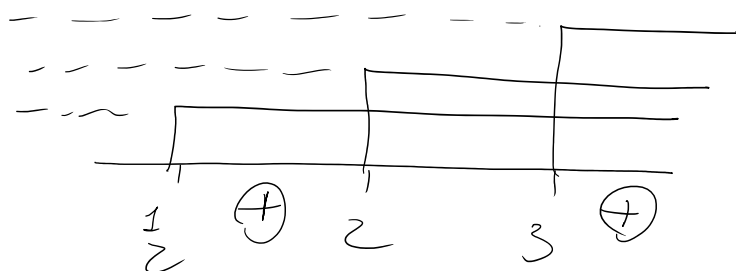
$$\Rightarrow (x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-3) > 0$$

regola segni

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$x - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$



Sol $\left] \frac{1}{2}, 2 \right[\cup \left] 3, +\infty \right[$